UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA
Année Universitaire 2019-2020

CALCUL DES PROBABILITES COURS ENS : 1

PROBABILITES CONDITIONNELLES. INDEPENDANCE EN PROBABILITE

I Objectifs

. Les décisions dans la vie courante sont souvent influencées ou conditionnées par la survenue d'événements extérieurs. L'influence de ces événements sur d'autres événements ne peut souvent être appréhendée que de façon subjective, mais parfois cette influence peut être appréhendée de façon objective par une mesure de probabilité.

Exemple 1

Admettons par exemple que pour vous rendre d'une ville à une autre vous utilisiez la voiture, car c'est le moyen de transport le plus rapide. Devant effectuer un trajet, vous apprenez qu'une manifestation est prévue sur la route, vous décidez de prendre le train car vous pensez que c'est cette fois-ci le moyen le plus rapide.

. La probabilité du choix de tel ou tel moyen de transport est conditionnée par l'événement **M** : Manifestation ($\bar{M}$: non manifestation). Si **T** désigne l'événement **« prendre le train »**, V désigne l'événement « **prendre la voiture** ». La probabilité de l'événement **T**, sachant (ou conditionné par) M, est noté P(**T/M**).

$P(T/M) = 1 \quad P(T/\bar{M}) = 0 \quad P(V/M) = 1 \quad P(V/\bar{M}) = 0$

Exemple 2

À l'issue d'un jet de dé on sait que le résultat est supérieur à trois et on s'intéresse à l'événement A = « obtenir une face paire ». Initialement on avait **P**(A) = 3/6 = 1/2 ; maintenant **Ω** est devenu **Ω**|B = {4, 5, 6} et

P(A|B) = 2/3 > 1/2 .

<u>Dans les deux exemples, l'information a priori influe donc sur la probabilité de réalisation d'un événement.</u>

Les situations rencontrées dans la pratique ne sont pas toujours aussi simples à modéliser ou à mesurer en termes de probabilités. Il faut définir de nouvelles notions de façon précise.

II L'essentiel à savoir

A. Définition des probabilités conditionnelles

On considère l'espace probabilisé (**Ω**, ɑ, **P**) et un événement particulier B de A tel que P(B) > 0.

ɑ = (**Ω**) est l'ensemble des parties de **Ω.**

La connaissance de la réalisation de B modifie la probabilité de réalisation d'un événement élémentaire, puisque l'ensemble des résultats possibles est devenu B et non plus **Ω**.

Cette nouvelle probabilité est définie de la manière suivante.

Soient A et B deux événements de **<u>ɑ compatibles</u>**, c'est-à-dire qu'ils peuvent se produire simultanément : $A \cap B \neq \emptyset$

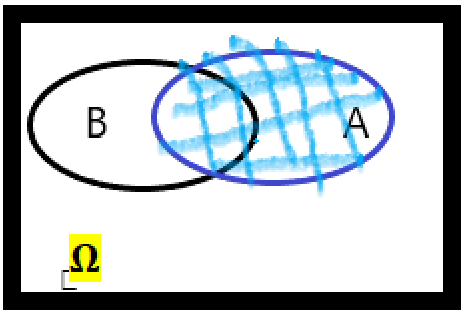
A et B sont de probabilité non nulle : P(A) $>$ 0 et **P**(B) $>$ 0.

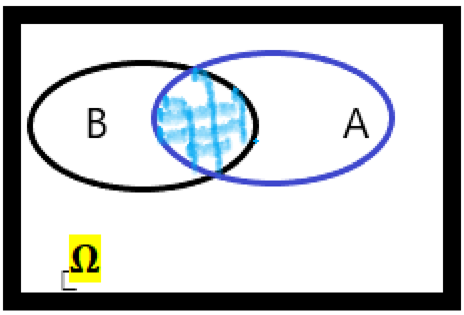
La probabilité de A sachant que B est réalisé se note : **P**(A/B) ou $\mathbf{P}_B$(A) et se lit : probabilité de A conditionnée par B (ou sachant B).

Par définition cette probabilité conditionnelle est :

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

Seuls les événements ayant une partie commune avec B peuvent se réaliser et la figure ci-dessous visualise cette situation où l'ensemble fondamental est devenu B et donc seule la part de A incluse dans B est prise en compte dans le calcul de la probabilité conditionnelle.





Exemple 1

Evaluer la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 4 au cours du jet unique d'un dé :

a- sans aucune information

b- si l'on sait que le résultat obtenu est impair

Réponse

a- Soit B l'événement « inférieur à 4 ». Puisque B est l'union des événements réalisation de {1}, {2} ou {3}

$$P(A) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

b- Soit A l'événement « nombre impair ».

$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, de plus $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Nous pouvons constater que la connaissance du fait que le résultat est impair entraîne une élévation de la probabilité de 1 /2 à 2/3.

Exemple 2

On tire sans remise deux cartes successivement d'un jeu de 52 et on cherche la probabilité de tirer un as au deuxième coup sachant que l'on en a obtenu un au premier. Avec des notations évidentes :

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbf{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathbf{P}(A_1)} = \frac{(4/52)\text{x}\,3/51}{4/52} = \frac{1}{17}$$

Alors que la probabilité non conditionnelle

$$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{4\text{x}3}{52\text{x}51} + \frac{48\text{x}4}{52\text{x}51} = \frac{1}{13} = \mathbf{P}(A_1)$$

donc valeur plus élevée (avoir tiré un as au premier coup diminue la probabilité d'en tirer un au second).

Exemple 3

On lance trois fois une pièce de monnaie et on considère les événements A = « obtenir au moins deux face » et B = « obtenir face au premier coup ». L'ensemble fondamental retenu est $\mathbf{\Omega}$ = {P, F}, ensemble des triplets ordonnés, bien que l'ordre des résultats n'intervienne pas, mais pour qu'il y ait équiprobabilité des événements élémentaires, soit $P(\{\omega\}) = 1/8$ puisque card $\mathbf{\Omega} = 2^3 = 8$. Ces événements s'écrivent A = {FFP, FPF, PFF, FFF} et B = {FFF, FFP, FPF, FPP}, avec card A = card B = 4 donc P(A) = P(B) = 4/8 = 1/2. Calculons maintenant la probabilité conditionnelle P(A|B). On a A ∩ B = {FFP, FPF, FFF} donc card A ∩ B = 3 et P(A ∩ B) = 3/8. Ainsi

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

la probabilité conditionnelle a ici augmenté.

B. Conséquences de la définition

En permutant A et B dans la définition précédente, il vient :

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{A})}$$

et puisque $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \, . \, \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}) \, . \, \mathbf{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})$$

C. Indépendance en probabilité :

Par définition A et B sont indépendants en probabilité si

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \, . \, \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Conséquence 1 :

Puisque $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \, . \, \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}) \, . \, \mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ si A et B sont indépendants, $\mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A})$ et $\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B})$.

Conséquence 2 :

Si A et B sont indépendants, $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ le sont aussi, de même $\overline{\mathrm{A}}$ et B et enfin A et $\overline{\mathrm{B}}$**.**

Remarque

Ne pas confondre indépendance avec incompatibilité, car dans ce dernier cas A ∩ B = ∅ et **P**(A ∩ B) = 0.

Exemple

On jette un dé rouge et un dé vert et on considère les événements A = « le dé vert marque 6 », et B = « le dé rouge marque 5 ». Il nous faut démontrer que ces deux événements sont indépendants (bien entendu ce résultat est évident, il n’y a pas d’influence d’un dé sur l’autre !).

L'ensemble fondamental retenu est _ = E $\times$ E, avec E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, sur lequel il y a équiprobabilité : P({ω}) = 1/36. Comme A = {6} × E, B = E $\times$ {5} et A $\cap$ B = {(6, 5)} on obtient :

sur lequel il y a équiprobabilité : P({ω}) = 1/62. Comme A = {6} × E, B = E $\times$ {5} et A $\cap$ B = {(6, 5)} on obtient :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathbf{card}(\mathrm{A})}{\mathbf{card}(\boldsymbol{\Omega})} = \frac{6}{36}$$

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \frac{\mathbf{card}(\mathrm{B})}{\mathbf{card}(\boldsymbol{\Omega})} = \frac{6}{36}$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{\mathbf{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbf{card}(\boldsymbol{\Omega})} = \frac{1}{36} = \mathbf{P}(\mathrm{A})\mathbf{P}(\mathrm{B})$$

et les événements A et B sont donc bien indépendants.

III Compléments

A. Généralisation des probabilités conditionnelles

Soit, A, B, C des événements liés à une expérience aléatoire :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \,.\, \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \,.\, \mathbf{P}(\mathrm{C}|\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

En permutant de différents façons A, B, et C il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) &= \mathbf{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{B}) \,.\, \mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \,.\, \mathbf{P}(\mathrm{C}|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{A}) \,.\, \mathbf{P}(\mathrm{C}|\mathrm{A}) \,.\, \mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \\ &= \ldots\end{aligned}$$

Il existe en définitive six façons de décomposer $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ en produit de trois probabilités faisant intervenir les événements conditionnels.

Enfin, si $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ constitue une suite d'événements :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \,.\mathbf{P}(A_2|A_1) \,.\, \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

B. Généralisation de l'indépendance en probabilité

$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \,.\, \mathbf{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ exprime que les deux événements sont indépendants en probabilité, cette notion se généralise.

Une suite d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ liés à une expérience aléatoire sont mutuellement indépendants si :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \,.\, \mathbf{P}(A_2) \ldots \mathbf{P}(A_i) \ldots \mathbf{P}(A_n)$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{P}(\cap_i A_i) = \prod_i \mathbf{P}(A_i)$$

Exemple

On lance deux pièces de monnaie distinctes et on s'intéresse aux événements A = « obtenir pile sur la pièce 1 », B = « obtenir pile sur la pièce 2 » et C = « obtenir pile sur une seule pièce ». À chaque pièce est attaché le même ensemble fondamental E = {P, F} et à l'expérience l'ensemble $\boldsymbol{\Omega}$ = E $\times$ E. On peut écrire A = {P} × E = {PP, PF} donc P(A) = 2/4, B = E $\times$ {P} = {PP, FP} donc P(B) = 2/4 et C = {PF, FP} donc P(C) = 2/4. On considère maintenant les événements deux à deux :

A $\cap$ B = {PP} donc P(A $\cap$ B) = 1/4 = P(A)P(B), A $\cap$ C = {PF} donc P(A $\cap$ C) = 1/4 = P(A)P(C) et B $\cap$ C = {FP} donc P(B $\cap$ C) = 1/4 = P(B)P(C) , ces événements sont indépendants deux à deux. Mais A $\cap$ B $\cap$ C = Ø donc P(A $\cap$ B $\cap$ C) = 0 $\neq$ P(A)P(B)P(C) et ces événements ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA
Année Universitaire 2019-2020

CALCUL DES PROBABILITES COURS ENS : 1

THEOREME DE BAYES

I. Cas de deux événements

On considère un espace probabilisé fini ($\boldsymbol{\Omega}$, $\mathfrak{a}$, **P**).

. Soit A et B deux événements tels que **P**(B) $\neq 0$ et **P**($\overline{\mathrm{B}}$) $\neq 0$

$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{\Omega}$ donc $B = B \cap \boldsymbol{\Omega} = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$ donc $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = \emptyset$ **et :**

$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}[(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})] = \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(B \cap \overline{A})$

On exprime ces deux derniers termes à l'aide de probabilités conditionnelles, et on obtient :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(B \cap \overline{A})$$
$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A/B) + \mathbf{P}(\overline{A})\,\mathbf{P}(\overline{A}|B)$$

. On suppose de plus que **P**(B) $\neq 0$. Alors, on a :

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(B)}$$

On utilise la propriétés précédente pour exprimer **P**(B), et on obtient le théorèmes de Bayes dans le cas de deux événements :

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(\overline{A})\,\mathbf{P}(\overline{A}|B)}$$

II. Cas général

Nous venons de considérer le système complet d'événements (A **,** $\overline{A}$) dans $\boldsymbol{\Omega}$**.**

Nous allons maintenant généraliser les deux formules précédentes au cas d'un système complet d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m$ de probabilités toutes non nulles.

. $\boldsymbol{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ donc $B = B \cap \boldsymbol{\Omega} = B \cap \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)$

Les A_i sont deux à deux incompatibles, donc les $(B \cap A_i)$ sont également deux à deux incompatibles et on a :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^{m}(B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(B \cap A_i)$$

On exprime les $\mathbf{P}(B \cap A_i)$ à l'aide de probabilités conditionnelles et on obtient :

$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(B| A_i)\mathbf{P}(A_i)$

. Si $P(B) \neq 0$, alors :

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_i)\, \mathbf{P}(B|A_i)}{\mathbf{P}(B)}$$

On utilise la formule précédente pour remplacer **P**(B), et on obtient le théorème de Bayes :

$$\mathbf{P(A_i|B)} = \frac{\mathbf{P(A_i)\, P(B|A_i)}}{\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P(A_i)P(B|\, A_i)}}$$

Exemple

Considérons une expérience aléatoire qui se déroule en deux étapes : on tire au sort entre deux urnes U_1 et U_2 , avec des probabilités respectives de 1/5 et 4/5 puis on tire une boule dans l'urne choisie. Leurs compositions respectives sont 6 blanches, 4 noires et 3 blanches, 7 noires. La probabilité a priori de U_1 est donc 1/5. Sa probabilité a posteriori, sachant qu'on a obtenu une boule blanche, va être plus élevée car la probabilité de tirer une blanche dans U_1 est plus forte que dans U_2.

On a :

$$\mathbf{P}(U_1|B) = \frac{\mathbf{P}(U_1 \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

$$\mathbf{P}(U_1 \cap B) = \mathbf{P}(U_1)\mathbf{P}(B|U_1) = \frac{1}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{25}$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap U_1) + \mathbf{P}(B \cap U_2)$$

$$= \mathbf{P}(U_1)\mathbf{P}(B|U_1) + \mathbf{P}(U_2)\mathbf{P}(B|U_2)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{25}$$

ainsi

$$\mathbf{P}(U_1|B) = \frac{\mathbf{3/25}}{\mathbf{9/25}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} > \mathbf{P}(U_1) = \frac{1}{5}$$

Cet exemple peut se traiter par application de la formule de Bayes